UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526
Mayo-Julio 2021

Práctica 4
Soluciones
Gustavo Lau
2021-06-04

Definiciones

Definición de $\varnothing$. El conjunto vacío se denota $\varnothing$. Entonces:

$$(\forall x| : x \notin \varnothing)$$

Definición de subconjunto. Dados dos conjuntos A y B, A es subconjunto de B si y solo si todo elemento de A es elemento de B. Simbólicamente:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x| : x \in A \implies x \in B)$$

Definición de subconjunto propio. Dados dos conjuntos A y B, A es subconjunto propio de B si y solo si A es subconjunto de B y $A \neq B$. Simbólicamente:

$$A \subset B \equiv (\forall x| : x \in A \implies x \in B) \wedge A \neq B$$

Definición de unión de conjuntos (unión binaria). La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son los elementos de A y los elementos de B. Se denota por $A \cup B$. Simbólicamente:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Definición de intersección de conjuntos (intersección binaria). La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son los elementos comunes de A y B. Se denota por $A \cap B$. Simbólicamente:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Definición de unión de un conjunto (unión unaria). Si A es un conjunto, existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de A. Se denota por $\bigcup A$. Simbólicamente:

$$x \in \bigcup A \equiv (\exists B| : B \in A \wedge x \in B)$$

Ejemplos de unión unaria:

$$\bigcup\{A, B, C\} = A \cup B \cup C$$

$$\bigcup\{\{1,2\},\{1,6,7\}\} = \{1,2\} \cup \{1,6,7\} = \{1,2,6,7\}$$

$$F = \{\{1,2\},\{2,7\},\{2,9\}\} \implies \bigcup F = \{1,2,7,9\}$$

Definición de intersección de un conjunto (intersección unaria).

$$x \in \bigcap A \equiv A \neq \varnothing \wedge (\forall B| : B \in A \implies x \in B)$$

Ejemplos de intersección unaria:

$$\bigcap\{A, B, C\} = A \cap B \cap C$$

$$\bigcap\{\{1,2\},\{1,6,7\}\} = \{1,2\} \cap \{1,6,7\} = \{1\}$$

$$F = \{\{1,2\},\{2,7\},\{2,9\}\} \implies \bigcap F = \{2\}$$

Definición (Familias de Conjuntos). Una familia de conjuntos es un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

1. Sean F, F_1 familias. Demuestre que

$$F \neq \varnothing \wedge F_1 \neq \varnothing \wedge F \subseteq F_1 \implies \bigcap F_1 \subseteq \bigcap F$$

Respuesta

Como sugiere Pólya (Cómo plantear y resolver problemas, How to Solve It) hay que empezar por asegurarnos de que entendemos el problema. Por cierto, en este artículo reciente mencionan ese libro: Declassified Cold War code-breaking manual has lessons for solving 'impossible' puzzles.

Para entender el problema podemos comenzar por crear un ejemplo pequeño:

$$\begin{aligned}
&F = \{A, B\}\\
&F_1 = \{A, B, C\}\\
&\bigcap F = A \cap B\\
&\bigcap F_1 = A \cap B \cap C\\
&\bigcap F_1 \subseteq \bigcap F
\end{aligned}$$

Intuitivamente: Si F y F_1 no son vacíos y F_1 tiene más conjuntos que F entonces $\bigcap F_1$ es la intersección de más conjuntos que $\bigcap F$.

$$\begin{aligned}
&\quad F \neq \varnothing\\
\equiv &\quad \langle \text{definición de } \varnothing \rangle\\
&\quad (\exists B| : B \in F)\\
&\quad \langle \text{definición de intersección unaria y } (p \wedge \text{Verdadero}) \equiv p \rangle\\
\therefore &\, x \in \bigcap F \equiv (\forall B| : B \in F \implies x \in B) \quad (1)
\end{aligned}$$

Análogamente de $F_1 \neq \varnothing$ deducimos que

$$x \in \bigcap F_1 \equiv (\forall B| : B \in F_1 \implies x \in B) \quad (2)$$

Como lo que queremos es demostrar una implicación comenzamos por el lado izquierdo.

Supongamos que $F \neq \varnothing \wedge F_1 \neq \varnothing \wedge F \subseteq F_1$.

$$\begin{aligned}
& x \in \bigcap F_1 \\
\equiv & \quad \langle (2) \rangle \\
& (\forall B| : B \in F_1 \implies x \in B) \\
\implies & \langle F \subseteq F_1 \rangle \\
& (\forall B| : B \in F \implies x \in B) \\
\equiv & \quad \langle (1) \rangle \\
& x \in \bigcap F \\
& \langle \text{definición de subconjunto} \rangle \\
& \therefore \bigcap F_1 \subseteq \bigcap F
\end{aligned}$$

$$\therefore F \neq \varnothing \wedge F_1 \neq \varnothing \wedge F \subseteq F_1 \implies \bigcap F_1 \subseteq \bigcap F$$

■

2. Considere la siguiente proposición:

$$(\forall F, F_1)(F \neq \varnothing \wedge F_1 \neq \varnothing \wedge F \cap F_1 \neq \varnothing \implies \bigcap (F \cap F_1) = (\bigcap F) \cap (\bigcap F_1))$$

Una de las contenciones de la igualdad de conjuntos es cierta y la otra es falsa. Demuestre aquella que es cierta y para la falsa muestre un contraejemplo.

Respuesta

Para entender el problema podemos comenzar por crear un ejemplo pequeño:

$$\begin{aligned}
& F = \{A, B\} \\
& F_1 = \{A, C\} \\
& F \cap F_1 = \{A\} \\
& \bigcap (F \cap F_1) = A \\
& \bigcap F = A \cap B \\
& \bigcap F_1 = A \cap C \\
& (\bigcap F) \cap (\bigcap F_1)) = A \cap B \cap C \\
& A \cap B \cap C \subseteq A
\end{aligned}$$

Contraejemplo de $\bigcap(F \cap F_1) \subseteq (\bigcap F) \cap (\bigcap F_1)$:

$$\begin{aligned}
&A = \{1,2\}\\
&B = \{1\}\\
&F = \{A, B\}\\
&F_1 = \{A\}\\
&F \cap F_1 = \{A\}\\
&\bigcap(F \cap F_1) = A = \{1,2\}\\
&\bigcap F = A \cap B = \{1\}\\
&\bigcap F_1 = A = \{1,2\}\\
&(\bigcap F) \cap (\bigcap F_1)) = A \cap B = \{1\}\\
&\bigcap(F \cap F_1) \nsubseteq (\bigcap F) \cap (\bigcap F_1)
\end{aligned}$$

Demostración de que $(\bigcap F) \cap (\bigcap F_1) \subseteq \bigcap(F \cap F_1)$:

Como en el ejercicio anterior:

De $F \neq \varnothing$ deducimos que

$$x \in \bigcap F \equiv (\forall B| : B \in F \implies x \in B) \quad (1)$$

De $F_1 \neq \varnothing$ deducimos que

$$x \in \bigcap F_1 \equiv (\forall B| : B \in F_1 \implies x \in B) \quad (2)$$

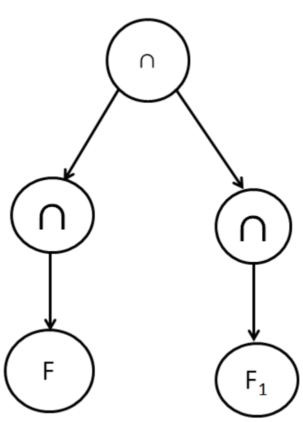
De $F \cap F_1 \neq \varnothing$ deducimos que

$$x \in \bigcap F \cap F_1 \equiv (\forall B| : B \in F \cap F_1 \implies x \in B) \quad (3)$$

Al aplicar las definiciones a una expresión hay que empezar usando la última expresión que se aplica para calcularla. Si empezamos con

$$(\bigcap F) \cap (\bigcap F_1)$$

el siguiente árbol, que es el árbol de esa expresión, nos indica en qué orden usar las definiciones:



$x \in (\bigcap F) \cap (\bigcap F_1)$

$\equiv \quad \langle$definición de intersección$\rangle$

$x \in \bigcap F \wedge x \in \bigcap F_1$

$\equiv \quad \langle(1)$ y $(2)\rangle$

$(\forall B| : B \in F \implies x \in B) \wedge (\forall B| : B \in F_1 \implies x \in B)$

$\implies \langle$ asociatividad de $\wedge$ y $((p \implies q) \wedge (r \implies q)) \implies ((p \wedge r) \implies q)\rangle$

$(\forall B| : B \in F \wedge B \in F_1 \implies x \in B)$

$\equiv \quad \langle$definición de intersección$\rangle$

$(\forall B| : B \in F \cap F_1 \implies x \in B)$

$\equiv \quad \langle(3)\rangle$

$x \in \bigcap F \cap F_1$

$\langle$definición de subconjunto$\rangle$

$\therefore (\bigcap F) \cap (\bigcap F_1) \subseteq \bigcap (F \cap F_1)$

■

3. **Definición de conjunto de partes (conjunto potencia).** El conjunto de partes de un conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A. Simbólicamente:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Demuestre que:

a) $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b) $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Respuesta

a) Intuitivamente: A es subconjunto de B si y sólo si cualquier subconjunto de A es subconjunto de B.

Supongamos que $A \subseteq B$

$x \in \mathcal{P}(A)$

$\equiv \quad \langle$definición de conjunto de partes$\rangle$

$x \subseteq A$

$\implies \langle A \subseteq B$ y $\subseteq$ es transitiva$\rangle$

$x \subseteq B$

$\equiv \quad \langle$definición de conjunto de partes$\rangle$

$x \in \mathcal{P}(B)$

$\langle$definición de subconjunto$\rangle$

$\therefore \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

$\therefore A \subseteq B \implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Supongamos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$:

$$
\begin{aligned}
& \langle \text{definición de conjunto de partes} \rangle \\
& A \in \mathcal{P}(A) \\
\implies & \langle \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \rangle \\
& A \in \mathcal{P}(B) \\
\equiv & \quad \langle \text{definición de conjunto de partes} \rangle \\
& A \subseteq B
\end{aligned}
$$

$\therefore \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \implies A \subseteq B$

$\therefore A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ∎

b) Igual que a) agregando que $A \neq B$ y $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

4. **Definición de producto cartesiano.** El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

Demuestre que:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Respuesta

a) Intuitivamente: En ambos casos la primera coordenada pertenece a A y la segunda a B o C.

$$
\begin{aligned}
& (x, y) \in A \times (B \cup C) \\
\equiv & \quad \langle \text{definición de producto cartesiano} \rangle \\
& x \in A \wedge y \in B \cup C \\
\equiv & \quad \langle \text{definición de unión} \rangle \\
& x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
\equiv & \quad \langle \wedge \text{ es distributiva respecto a } \vee \rangle \\
& (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
\equiv & \quad \langle \text{definición de producto cartesiano} \rangle \\
& (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C \\
\equiv & \quad \langle \text{definición de unión} \rangle \\
& (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \\
\therefore & \ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}
$$

∎

b) Intuitivamente: En ambos casos la primera coordenada pertenece a A y B y la segunda a C y D.

$$\begin{array}{ll} & (x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \\ \equiv & \langle \text{definición de producto cartesiano} \rangle \\ & x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D \\ \equiv & \langle \text{definición de intersección} \rangle \\ & (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \\ \equiv & \\ & (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\ \equiv & \langle \text{definición de producto cartesiano} \rangle \\ & (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \in (B \times D) \\ \equiv & \langle \text{definición de intersección} \rangle \\ & (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D) \\ \therefore & (A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) \end{array}$$

■

5. **Definición de relación.** Una relación R de A en B es un subconjunto de $A \times B$:

$$R \subseteq A \times B$$

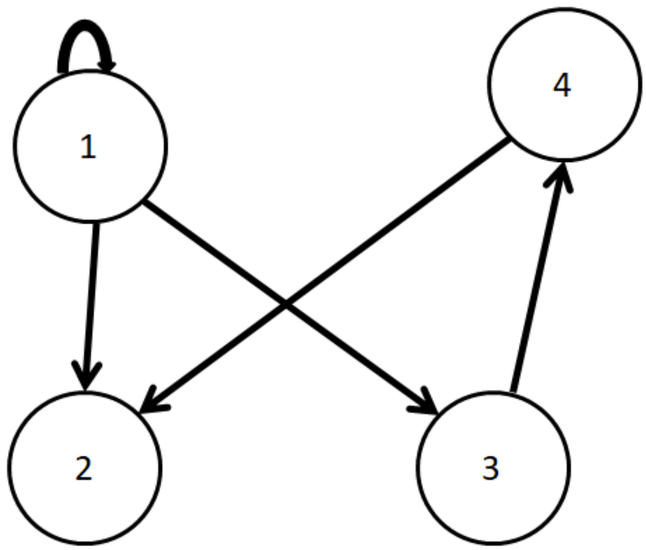
Definición de relación inversa. La relación inversa de una relación R es

$$R^{-1} = \{(x,y) | (y,x) \in R\}$$

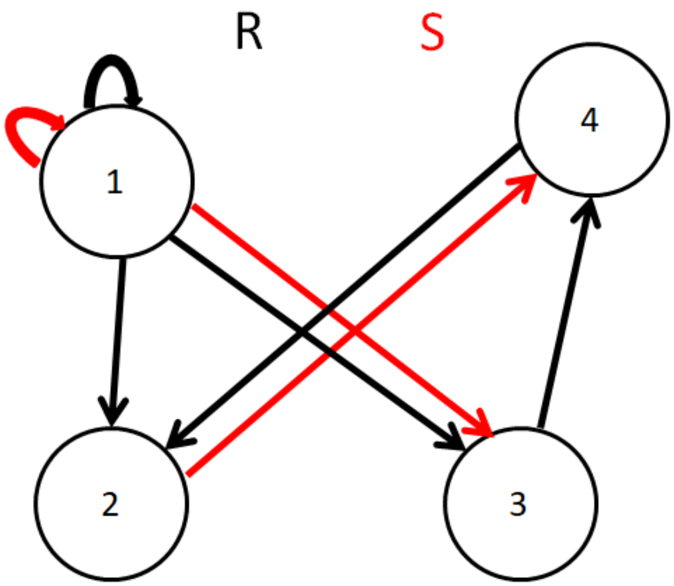
Sean R y S dos relaciones. Demuestre que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

Respuesta

Ejemplo de grafo de relación:



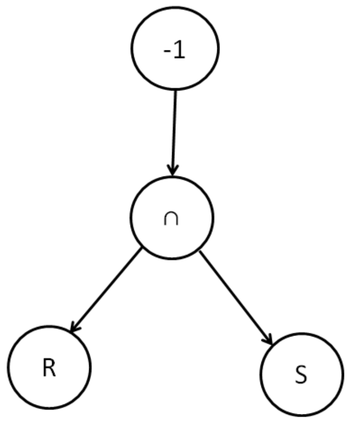
Podemos representar dos relaciones con dos colores diferentes para los arcos:



Intuitivamente:

En el lado izquierdo intersectamos las flechas y luego las volteamos. En el derecho volteamos las flechas y luego las intersectamos.

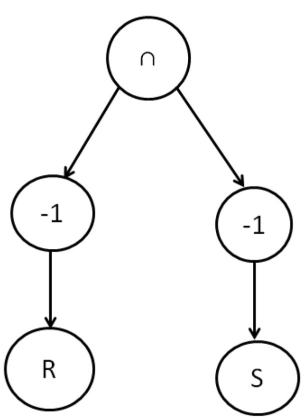
Al aplicar las definiciones a una expresión hay que empezar usando la última expresión que se aplica para calcularla. Si empezamos con $(R \cap S)^{-1}$ el siguiente árbol, que es el árbol de esa expresión, nos indica en qué orden usar las definiciones:



$$
\begin{aligned}
& (x,y) \in (R \cap S)^{-1} \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de relación inversa} \rangle \\
& (y,x) \in R \cap S \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de intersección} \rangle \\
& (y,x) \in R \wedge (y,x) \in S \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de relación inversa} \rangle \\
& (x,y) \in R^{-1} \wedge (x,y) \in S^{-1} \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de intersección} \rangle \\
& (x,y) \in R^{-1} \cap S^{-1}
\end{aligned}
$$

$\therefore (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ ■

Si hubiéramos empezado con $R^{-1} \cap S^{-1}$ el siguiente árbol, que es el árbol de esa expresión, nos hubiera indicado en qué orden usar las definiciones:



6. **Definición de dominio de una relación.** El dominio de una relación R es

$$Dom(R) = \{x|(\exists y|(x,y) \in R)\}$$

Definición de rango de una relación. El rango de una relación R es

$$Rgo(R) = \{y|(\exists x|(x,y) \in R)\}$$

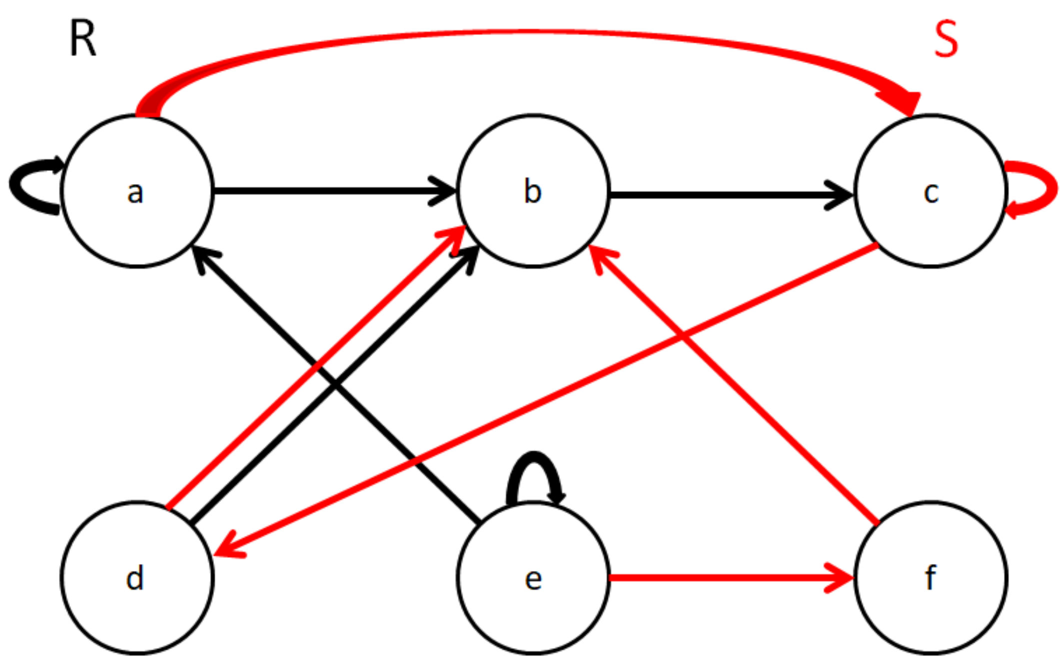
Definición de composición de relaciones. La composición de dos relaciones R y S es

$$R \circ S = \{(a,c)|(\exists b| : (a,b) \in S \wedge (b,c) \in R)\}$$

Sean:
$R = \{(a,b),(b,c),(d,b),(e,a),(a,a),(e,e)\}$
$S = \{(c,c),(d,b),(e,f),(f,b),(c,d),(a,c)\}$
Determine:

a) $Dom(R)$, $Dom(S)$ y $Dom(R \cup S)$
b) R^{-1} y S^{-1}, las inversas de R y S
c) $Rgo(R)$, $Rgo(S)$ y $Rgo(R \cup S)$
d) $R \circ S$ y $S \circ R$

Respuesta



a) $Dom(R) = \{a,b,d,e\}$
$Dom(S) = \{a,c,d,e,f\}$

$Dom(R \cup S) = \{a, b, c, d, e, f\}$

b) $R^{-1} = \{(b,a), (c,b), (b,d), (a,e), (a,a), (e,e)\}$

$S^{-1} = \{(c,c), (b,d), (f,e), (b,f), (d,c), (c,a)\}$

c) $Rgo(R) = \{a, b, c, e\}$

$Rgo(S) = \{b, c, d, f\}$

$Rgo(R \cup S) = \{a, b, c, d, e, f\}$

d) $R \circ S = \{(d,c), (f,c), (c,b)\}$

$S \circ R = \{(b,c), (b,d), (e,c), (a,c), (e,f)\}$

7. **Definición de relación reflexiva.**

$$R \text{ es reflexiva en } A \equiv \forall a \in A\ ((a,a) \in R)$$

Definición de relación transitiva.

$$R \text{ es transitiva en } A \equiv \forall a, b, c \in A\ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

Definición de diferencia de conjuntos. La diferencia de dos conjuntos A y B es:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Sean R y S dos relaciones sobre A. De las siguientes afirmaciones determine cuáles son ciertas o falsas. Para las falsas de un contraejemplo y para las verdaderas dar una demostración.

a) Si R y S son reflexivas en A entonces $R \circ S$ es reflexiva en A

b) Si R y S son transitivas en A entonces $R \cup S$ es transitiva en A

c) Si R y S son transitivas en A entonces $R \setminus S$ es transitiva en A

Respuesta

a) Intuitivamente: Reflexiva significa que en cada nodo hay una flecha a si mismo. Componer dos relaciones reflexivas da una relación reflexiva.

$$\begin{aligned}
& R \text{ y } S \text{ son reflexivas en } A \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de relación reflexiva} \rangle \\
& \forall a \in A\ ((a,a) \in R \wedge (a,a) \in S) \\
\implies & \langle \text{definición de composición de relaciones} \rangle \\
& \forall a \in A\ ((a,a) \in R \circ S) \\
\equiv \quad & \langle \text{definición de relación reflexiva} \rangle \\
& R \circ S \text{ es reflexiva en } A
\end{aligned}$$

$\therefore R$ y S son reflexivas en $A \implies R \circ S$ es reflexiva en A $\blacksquare$

b) Intuitivamente: En el grafo de R y S podríamos ir con R de 1 a 2 y con S de 2 a 3 pero no podríamos ir con la unión $R \cup S$ de 1 a 3.

Contraejemplo:

$$\begin{aligned} &R = \{(1,2)\} \\ &S = \{(2,3)\} \\ &R \cup S = \{(1,2),(2,3)\} \end{aligned}$$

R y S son transitivas en $\{1,2,3\}$ y $R \cup S$ no lo es.

c) Intuitivamente: En el grafo de R y S podríamos ir con R de 1 a 2, 2 a 3 y 1 a 3 y con S de 1 a 3. Al quitar (1,3) a R ya no es transitiva.

Contraejemplo:

$$\begin{aligned} &R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\} \\ &S = \{(1,3)\} \\ &R \setminus S = \{(1,2),(2,3)\} \end{aligned}$$

R y S son transitivas en $\{1,2,3\}$ y $R \setminus S$ no lo es.